

Rango de una Matriz con Determinantes

● Recordatorio rápido:

El rango de una matriz es el orden del mayor subdeterminante no nulo.

Es decir, busca si hay algún menor de orden 3, 2 o 1 que sea distinto de 0.

● Si el determinante de la matriz cuadrada completa $\neq 0$, su rango es el máximo.

Nivel 1 – Matrices 2x2

Ejercicio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

$$Rg(M) = 2$$

Ejercicio 2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$|2| = 2 \neq 0 \quad Rg(M) = 1$$

Ejercicio 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |0| = 0$$

$$Rg(M) = 0$$

Ejercicio 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$$|1| = 1 \neq 0 \quad Rg(M) = 1$$

Ejercicio 5

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25 \neq 0 \quad Rg(M) = 2$$

Nivel 2 – Matrices 3x3

Ejercicio 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad Rg(M) = 3$$

Ejercicio 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} = 0 \quad |1| = 1 \neq 0$$

$$Rg(M) = 1$$

Ejercicio 8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 - 8 \neq 0$$

$$Rg(M) = 2$$

Ejercicio 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|0 \ 1| = 1 \neq 0$$

$$Rg(M) = 2$$

Ejercicio 10

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$Rg(M) = 2$$

Nivel 3 – Matrices 3x4 y 4x3 (no cuadradas)

(tienes que buscar submatrices cuadradas y calcular sus determinantes)

Ejercicio 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Rg}(M) = 3$$

Ejercicio 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Rg}(M) = 2$$

Ejercicio 13

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 12 - 12 - 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\text{Rg}(M) = 2$$

Ejercicio 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 15

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 \neq 0 \quad \text{Rg}(M) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Rg}(M) = 2$$

Nivel 4 – Matrices 4x4 (requieren más cálculo)

Ejercicio 16

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 72 + 144 + 90 - 144 - 90 - 72 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 64 + 40 - 64 - 40 - 28 = 0$$

Ejercicio 17

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Rg}(M) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 42 - 48 \neq 0$$

$$\text{Rg}(M) = 2$$

Ejercicio 18

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Rg}(M) = 3$$

Ejercicio 19

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Rg}(M) = 3$$

Ejercicio 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 \neq 0$$

$$\text{Rg}(M) = 2$$

Rango con Método de Gauss

● Recuerda:

- "Haz ceros debajo del pivote en cada columna."
- "El número de filas no nulas al final es el rango."
- "No necesitas llegar a la forma reducida, solo triangular superior."

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \equiv F_2 - 3F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 fila $\rightarrow Rg(M) = 1$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2 filas $\Rightarrow Rg(M) = 2$

3

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv 2F_2 - F_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 fila $\rightarrow Rg(M) = 1$

4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 filas $\Rightarrow Rg(M) = 2$

5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \equiv F_2 - 2F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 fila $\rightarrow Rg(M) = 1$

6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 filas $\Rightarrow Rg(M) = 3$

7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 fila $\Rightarrow Rg(M) = 1$

8

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 filas $\Rightarrow Rg(M) = 2$

9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 filas $\Rightarrow Rg(M) = 2$

10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 filas $\Rightarrow Rg(M) = 2$

11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 filas $\Rightarrow Rg(M) = 3$

12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 filas $\Rightarrow Rg(M) = 2$

13

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Filas

$Rg(M) = 2$

14

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} 2F_4 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2F_4 + F_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Rg(M) = 3$$