Nivel 1: Determinantes de matrices 2x2

Nota teórica: El determinante de una matriz 2x2 se calcula como:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{entonces } \det(A) = ad - bc$$

Ejercicio 1:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 5\cdot 1 = 7$$

Ejercicio 2:

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 0 - 7\cdot 3 = -21$$

Nivel 2: Determinantes de matrices 3x3 utilizando la regla de Sarrus

Nota teórica: La **regla de Sarrus** permite calcular el determinante de una matriz 3x3 de la siguiente manera:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \text{entonces } \det(A) = \overbrace{aei + bfg + cdh}\ \overbrace{- ceg - bdi - afh}$$

Ejercicio 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 36+70+0-84-0-40 =$$
$$= -18$$

Ejercicio 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0+10+72-0-60+4 =$$
$$= 26$$

Nivel 3: Aplicación del teorema de Laplace en matrices 4x4

Nota teórica: El **teorema de Laplace** permite descomponer el cálculo de un determinante de una matriz de orden n en determinantes de orden $n-1$, facilitando su cálculo. Wikipedia, la enciclopedia libre

Ejercicio 5:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$= (32-105-30-112) + 2(-72+60-72-64) + (-63-18-56) = -648$$

Ejercicio 6:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(96+54+48) - 3(108+84-54+42) + (96-42-48) - 5(64+14+16+36) =$$
$$= -788$$

Nivel 4: Determinantes con parámetros y propiedades especiales

Nota teórica: Algunas propiedades de los determinantes incluyen: iesjuangris.com +2

- Si una matriz tiene una fila o columna de ceros, su determinante es cero.
- Si dos filas o columnas son proporcionales, el determinante es cero.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejercicio 7:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$

Ejercicio 8:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45+84+96-105-48-72 = 0$

(Nota: Esta matriz tiene filas linealmente dependientes; su determinante es 0.)

$(F_3 = 2F_2 - F_1) \to |M| = 0$

Ejercicio 9:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$|M| = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

(Nota: Matriz triangular; su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.)

Nivel 5: Desafío avanzado

Ejercicio 10:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(Sugerencia: Utiliza el teorema de Laplace desarrollando por la fila o columna que facilite más el cálculo.)

Wikipedia, la enciclopedia libre

$$2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(9+4-12) - 3(2-6+15) + (-2+20-15) - 4(3-10) =$$

$$= 2 \cdot 1 - 3 \cdot 11 + 3 - 4 \cdot (-7) = 2 - 33 + 3 + 28 = 0$$

Matriz Adjunta

$$\left({}^{t}D \right)$$

1. Para cada elemento a_{ij}, calcula su **cofactor**:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

(donde M_{ij} es el menor: el determinante de la matriz que queda al eliminar fila i y columna j).

2. Coloca todos los cofactores en una matriz.

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & +1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -4 & +2 & -10 \\ +8 & -4 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(E) = \begin{pmatrix} -7 & +12 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(F) = \begin{pmatrix} 4 & -20 & -8 \\ -9 & -3 & +6 \\ -1 & +5 & -10 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(G) = \begin{pmatrix} -24 & +20 & 5 \\ +18 & -15 & +4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(H) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ +2 & 3 & -3 \\ 0 & +10 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$ (¡Interesante por simetría! 🤓)

$$\text{Adj}(I) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(J) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ +2 & -3 & +8 \\ -5 & +2 & 2 \end{pmatrix}$$