UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2023-2024**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(\overline{A}) = \dfrac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \dfrac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{3}{10}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \dfrac{14}{25}$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$.

Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule:

a) (1.25 puntos) $\displaystyle\int_1^e (x+2)\ln x dx$.

b) (1.25 puntos) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

A.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Obtención de la ecuación de la recta: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos (0.25 puntos por la versión que usa cada teorema). Resolución: 0.5 puntos (0.25 puntos por la versión que usa cada teorema).
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de primitivas: 0.25 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

A.4.

a) Por cada probabilidad, 0.75 puntos (planteamiento: 0.5 puntos, resolución: 0.25 puntos).
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

B.1.

a) Justificación de la existencia de B^{-1}: 0.5 puntos. Cálculo de b: 0.75 puntos (0.5 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la solución correcta).
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos

B.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Solución del límite: 0.25 puntos.

B.3.

a) Planteamiento 0.5 puntos. Obtención de los dos valores de a: 0.5 puntos. Eliminación de $a = 15$ y comprobación de que $a = 3$ es válida: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

B.4.

a) Para cada una de las dos probabilidades: planteamiento, 0.25 puntos; resolución, 0.25 puntos.
b) Para cada una de las dos probabilidades: planteamiento, 0.5 puntos; resolución, 0.25 puntos.

MATEMÁTICAS II – SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

Si x es la longitud (en centímetros) de cada listón largo, y la de los intermedios, y z la de los cortos, las ecuaciones que se plantean son $2x+4y=3y+15z$, $x=y+z+17$ y $9z+7=x+y$, de manera que x, y, z son las soluciones al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-15z &=& 0 \\ x-y-z &=& 17 \\ x+y-9z &=& 7 \end{array}\right. .$$

Al resolver el sistema se obtiene que los listones largos miden 107 cm, 71 cm los intermedios, y 19 cm los cortos.

A.2.

a) Tenemos que $f(\pi)=5\pi^4$. Por otra parte $f'(x)=4x^3+3\pi x^2+2\pi^2 x+\pi^3$, con lo que $f'(\pi)=10\pi^3$. Así pues, la ecuación de la recta es : $y=10\pi^3(x-\pi)+5\pi^4$.
b) Se trata de un polinomio, por lo que $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Así, dado que $f(-\pi)=f(0)=\pi^4$, el teorema de Rolle asegura que existe algún punto $c\in(-\pi,0)$, tal que $f'(c)=0$. Por otra parte, dado que $f'(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y que $f'(-\pi)=-2\pi^3$ y $f'(0)=\pi^3$, aplicando el teorema de Bolzano a $f'(x)$ se prueba que existe algún punto $c\in(-\pi,0)$, tal que $f'(c)=0$.
c) $g(x)=x^4-\pi x^3+\pi^2x^2-\pi^3x+\pi^4$. Dado que en el intervalo $[0,\pi]$ se tiene que $x\geq 0$ y por tanto $g(x)\leq f(x)$, el área pedida es $A=\displaystyle\int_0^\pi (f(x)-g(x))\,dx=\int_0^\pi \left(2\pi x^3+2\pi^3 x\right)dx=\frac{3}{2}\pi^5$.

A.3.

a) Sea $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$. El plano buscado es $x-y=0$, que tiene vector normal $\overrightarrow{AB}\times(0,0,1)=(1,-1,0)$ y pasa por $(0,0,1)$.
b) Los vectores del plano $x+z=1$ son de la forma $(a,b,-a)$. Sea $(a,b,-a)$ vector director de r_1, con a y b no ambos nulos. La distancia entre r_1 y r_2 es la distancia entre el punto B y la recta r_1: $\mathrm{d}(B,r_1)=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\times(a,b,-a)\|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=\dfrac{|b-a|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+b^2}}=1\Rightarrow b^2-4ab=0\Rightarrow b=0$ o bien $b=4a$ (en ambos casos $a\neq 0$). Por tanto, $r_1:(x,y,z)=(\lambda,0,1-\lambda)$ y $r_2=(1+\lambda,1,-\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (o bien $r_1:(x,y,z)=(\lambda,4\lambda,1-\lambda)$ y $r_2=(1+\lambda,1+4\lambda,-\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$).

A.4.

a) $P(A)=1-\dfrac{11}{20}=\dfrac{9}{20}$. Además $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{9}{20}-P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{3}{20}$.

Por otro lado, $P(A|B)-P(B|A)=\dfrac{\frac{3}{20}}{P(B)}-\dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}}=\dfrac{1}{24}\Rightarrow P(B)=\dfrac{2}{5}$.

b) $P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\dfrac{14}{25}\Rightarrow\dfrac{9}{20}+P(C)-\dfrac{9}{20}P(C)=\dfrac{14}{25}\Rightarrow P(C)=\dfrac{1}{5}$.

B.1.

a) La matriz B es igual a $b \cdot D$ donde $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz D es invertible puesto que su determinante es no nulo. Por tanto, B también es invertible cuando $b \neq 0$ (y se tiene que $B^{-1} = b^{-1} \cdot D^{-1}$). De este modo, $BCB^{-1} = DCD^{-1}$. Dado que $DC = AD$, concluimos que para todo $b \neq 0$ se verifica $BCB^{-1} = DCD^{-1} = A$.
b) El determinante de A es el mismo que el de C, que es igual a 12. Así pues, el determinante de AA^t es 144.
c) Para $b = 1 \neq 0$, el sistema es compatible determinado (y $B = D$). La solución es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, $x = -6$, $y = 2$ y $z = 5$.

B.2.

a) Resolvemos por integración por partes:
$u = \ln x, \quad dv = (x+2)dx, \quad du = \dfrac{1}{x}dx, \quad v = \dfrac{x^2}{2} + 2x.$
La integral definida será

$$\int_1^e (x+2)\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 2\right)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + 2x\right)\right]_1^e = \frac{e^2+9}{4}.$$

b) Dado que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = 1^\infty$ (indeterminación), usamos que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\cos x}}$ (si el límite del exponente existe). Ahora bien,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\cos x} = \frac{0}{0}\text{(indet.)} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = -1.$$

Por tanto, el límite buscado es e^{-1}.

B.3.

a) El volumen del tetraedro es $\dfrac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4})\right|$.
Como $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 1)$ y $\overrightarrow{P_1P_4} = (2, a-1, 2)$, el valor del determinante es $9 - a$. Así, hay que resolver $9 - a = \pm 6$, que tiene por soluciones $a = 15$ y $a = 3$. Pero el valor $a = 15$ hace que la arista P_1P_4 mida más de 10. Así $a = 3$, valor con el que todas las aristas miden menos de 10.
b) Los vértices del paralelepípedo pedido son P_1, $P_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2}$, $P_3 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_3}$, $P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}$, Q, $Q + \overrightarrow{P_1P_2}$, $Q + \overrightarrow{P_1P_3}$, $Q + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}$. Estos puntos son $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 3, 2)$, $(3, 5, 4)$ y $(4, 5, 3)$.

B.4.

a) Puesto que el resultado de ambos dados es independiente, si escribimos cada posible lanzamiento como (a, r), siendo a el resultado del dado azul y r el resultado del dado rojo, hay 36 casos posibles, todos equiprobables. Los casos favorables para obtener una puntuación $p = 10$ son $\{(2, 4), (4, 3), (5, 5), (6, 2)\}$, por lo que la probabilidad de ese suceso es $P(p = 10) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Por otra parte, $P(p \text{ impar}) = P(a \text{ impar} \cap r \text{ par}) = P(a \text{ impar})P(r \text{ par}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
b) Para calcular la probabilidad de que el dado azul sea par sabiendo que la puntuación final es $p = 8$, los casos posibles son $\{(2, 3), (3, 5), (4, 2), (5, 3), (6, 1)\}$, y de ellos los casos favorables son $\{(2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$. La probabilidad buscada es $\frac{3}{5}$.
La otra probabilidad es

$$P(r \text{ impar}|p \text{ par}) = \frac{P(r \text{ impar} \cap p \text{ par})}{P(p \text{ par})}.$$

Notemos ahora que siempre que se da el suceso "dado rojo impar", la puntación final debe ser par, ya haya sido el dado azul impar o par. Por tanto, $P(r \text{ impar} \cap p \text{ par}) = P(r \text{ impar})$. La probabilidad buscada sería entonces

$$\frac{P(r \text{ impar})}{P(a \text{ impar})P(r \text{ impar}) + P(a \text{ par})} = \frac{(1/2)}{(1/2)(1/2) + (1/2)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$