EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2021–2022

Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(1)
Convocatoria:	

Instrucciones:
- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Criterios de calificación

A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.

B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.

C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.

D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).

E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.

F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.

G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.

H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)

I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficiente. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.

K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.

L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.

M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.

N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

Bloque 1.- Análisis

1A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 1.75 ptos

Calcular los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$

Dar la expresión de la función $f(x)$

b) Resuelve el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\boldsymbol{e^x+e^{-x}-2}}{\boldsymbol{1-\cos x}}$ 0.75 ptos

Solución:

a) Se sabe que tiene un extremo relativo en P(0,1), entonces $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, por tanto, $f(0) = d = 1$.

Además, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f'(0) = c = 0$

Por otro lado, $f(x)$ tiene un punto de inflexión en (1,-1), por tanto,

$$f(1) = -1 \text{ y } f''(1) = 0$$

$$\begin{matrix} f(1) = a + b + 1 = -1;\ a + b = -2 \\ f''(x) = 6ax + 2b;\ \ f''(1) = 6a + 2b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}; \qquad a = 1; b = -3$$

Los valores resultantes son: $a = 1$; $b = -3$; $c = 0$; $d = 1$ y la función sería

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}\ L'Hopital} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{sen\ x} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}\ L'Hopital} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = 2$$

1B. Considera las siguientes funciones: $y = 3x - x^2$; $y = x - 3$

a) Representa el recinto que encierra las dos funciones. 1.5 ptos

b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores 1 ptos

Solución:

a) Calculamos los puntos de corte:

$$3x - x^2 = x - 3;\ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Los puntos de corte vendrán dados por:

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 3^2 = 9 - 9 = 0 \to A(3{,}0)$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) - (-1)^2 = -3 - 1 = -4 \to B(-1, -4)$$

Ahora averiguamos los puntos notables de la parábola: $y = 3x - x^2$

Corte con el eje OX:

$$3x - x^2 = 0 \to x(3 - x) = 0; x = 0\ y\ x = 3 \to P(0{,}0), Q(3{,}0)$$

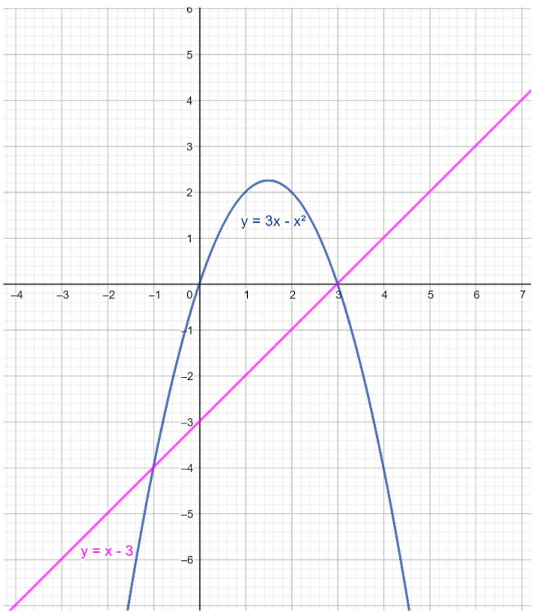
Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{-2} = 1.5 \to y_v = 3 \cdot (1.5) - (1.5)^2 = 2.25 \to V(1.5{,}2.25)$

La recta: $y = x - 3$

Puntos de corte con el eje OX: $x = 3 \to C(3{,}0)$

Punto de corte con el eje OY: $Y = 0 - 3 = -3 \to D(0, -3)$

Representamos el recinto:



b) Área $= \int_{-1}^{3} (3x - x^2) - (x - 3)dx = \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3\, dx = \left.\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$

$(-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3} u^2$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$ sea C_k la matriz dada por: 0.75 ptos

$$C_k = A^t + k\, B \cdot A$$

Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2 1.75 ptos

b) Encuentra la matriz X, de dimensión $3x3$, que verifica $M^t \cdot X = I - M$, donde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Calculamos la matriz C en función del parámetro k:

$$C = A^t + k\, B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t + k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz C:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{vmatrix} = (1-k)(1+k) = 1 - k^2 = 0 \rightarrow k = \pm 1$$

Por tanto, si $k \neq 1$ ó $k \neq -1$, el rango de la matriz C es 2

b) Despejamos $X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M)$

Calculamos $(M^t)^{-1} = \frac{1}{|M^t|}\left(Adj(M^t)\right)^t$, para ello necesitamos:

$$|M^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(Adj(M^t))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego: $(M^t)^{-1} = \frac{1}{|M^t|}\left(Adj(M^t)\right)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos:

$$X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2B. Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x+6y+kz=0 \\ kx+4y+2z=2 \\ kx+6y+2z=k-2 \end{cases}$

a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro $\boldsymbol{k}$ 1.5 ptos

b) Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $\boldsymbol{k=0}$ 1 ptos

Solución:

a) Definimos la matriz del sistema $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $M=$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & k & 0 \\ k & 4 & 2 & 2 \\ k & 6 & 2 & k-2 \end{array}\right)$

Estudiamos el $rang(A)$:

Para ello calculamos $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{vmatrix}=2k^2-8=0 \Rightarrow k=2$ y $k=-2$

Por tanto,

Si $\boldsymbol{k\neq 2}$ y $\boldsymbol{k\neq -2}$,$|A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=rang(M)=3$

Nº de incógnitas =3

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un SCD, por tanto, solución única.

Si $\boldsymbol{k=2}$, $|A|=0 \Rightarrow rang(A)\neq 3$

Entonces: $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $M=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right)$

El $rang(A)=2$, pues el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-4\neq 0$

Estudiemos el $rang(M)=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right)$. Como la primera y la tercera filas son iguales: $rang(M)=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)=2$, pues el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-4\neq 0$

Tenemos en este caso:

$$rang(A)=rang(M)=2$$

Nº de incógnitas =3

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un SCI con infinitas soluciones.

Si $\boldsymbol{k=-2}$, $|A|=0 \Rightarrow rang(A)\neq 3$

Entonces: $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $M=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{array}\right)$

El $rang(A)=2$, pues el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=20\neq 0$

El $rang(M)=3$, pues el menor de orden 3 $\begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-128\neq 0$

Tenemos en este caso:

$$rang(A)=2$$
$$rang(M)=3$$

Nº de incógnitas =3

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un SI, no tiene solución.

b) Si $\boldsymbol{k=0}$, el sistema (como hemos visto en a) es un SCD con:

$$A=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&4&2\\0&6&2\end{pmatrix}\ \text{ y } M=\left(\begin{array}{ccc|c}2&6&0&0\\0&4&2&2\\0&6&2&-2\end{array}\right)$$

Aplicamos la regla de Cramer para resolverlo:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&6&0\\0&4&2\\0&6&2\end{vmatrix}=-8$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&6&0\\2&4&2\\-2&6&2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-48}{-8}=6$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&-2&2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{16}{-8}=-2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&6&0\\0&4&2\\0&6&-2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-40}{-8}=5$$

La solución del sistema será: $(x,y,z)=(6,-2{,}5)$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa entre r y s — 1.5 ptos

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z-5=0$ — 1 ptos

Solución:

A) Analizamos si las rectas son paralelas o coincidentes. Para ello obtenemos los vectores directores de las rectas y estudiamos si son proporcionales.

Calculamos el vector director de la recta r:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k} = (4,-1,-3)$$

El vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (2,1,-3)$

Los vectores obtenidos no son proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas, ni coincidentes,

$$\frac{4}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{-3}.$$

Veamos si las rectas que nos proporcionan son coplanarias o bien se cruzan.

Una forma de comprobarlo es estudiar si el conjunto de vectores formado por los vectores directores de las rectas y el vector determinado por un punto de cada recta, son linealmente independientes.

Obtengamos un punto de cada una de las rectas.

Un punto de la recta r:

Tomamos $y=0$, por lo que $\begin{cases} x+z=-1 \\ 2x+3z=2 \end{cases}$ y donde se obtiene $x=-5$ y $z=4$.

El punto será $P(-5,0,4)$.

Un punto de la recta s es $Q(-1,1,-1)$.

Y el vector $\overrightarrow{PQ} = (4,1,-5)$.

Comprobemos si los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes.

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Los vectores son linealmente dependientes $\Rightarrow$ Están en el mismo plano $\Rightarrow$ Las rectas son coplanarias.

Como las rectas son coplanarias éstas han de ser paralelas, coincidentes o secantes.

Como se ha visto que no son ni paralelas ni coincidentes, han de ser secantes.

Las rectas son **secantes**

B) Un punto de la recta r:

Tomamos $y = 0$, por lo que $\begin{cases} x + z = -1 \\ 2x + 3z = 2 \end{cases}$ y donde se obtiene $x = -5$ y $z = 4$.

El punto será $P(-5,0,4)$.

Como el plano buscado contiene a la recta r, el punto $P(-5,0,4)$ es un punto del plano y el vector $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = (4,-1,-3)$ es un vector del plano.

Como el plano buscado es perpendicular a π, el vector normal $\overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,1)$ será un vector del plano buscado.

Por tanto, el plano que se pide será:

$$(x, y, z) = (-5,0,4) + t(4,-1,-3) + s(2,-1,1)$$

O bien, la ecuación general:

$$4x + 10y + 2z + 12 = 0 \rightarrow 2x + 5y + z + 6 = 0$$

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes: $r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases}$ y $\pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A 1.5 ptos

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π 1 ptos

Solución:

a)

Averiguamos un punto y el vector director de la recta r:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} + 12\vec{k} = (6,9,12)$$

Para localizar un punto:

Tomamos $y=1$, por lo que $\begin{cases} -3x+2=5 \\ -4+3z=-7 \end{cases}$ y donde se obtiene $x=-1$ y $z=-1$.

El punto será $P(-1,1,-1)$.

Escribimos la recta en paramétrica y la sustituimos en el plano para averiguar el valor del parámetro λ que dará lugar al punto de corte:

$$r: \begin{cases} x=-1+6\lambda \\ y=1+9\lambda \\ z=-1+12\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x-6y+7z+58 &= 5(-1+6\lambda)-6(1+9\lambda)+7(-1+12\lambda)+58 \\ &= -5+30\lambda-6-54\lambda-7+84\lambda+58 = 40+60\lambda = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{40}{60} = -\frac{2}{3}$$

El punto de corte será:

$$\begin{cases} x=-1+6\lambda=-1+6\left(-\frac{2}{3}\right)=-1-4=-5 \\ y=1+9\lambda=1+9\left(-\frac{2}{3}\right)=1-6=-5 \\ z=-1+12\lambda=-1+12\left(-\frac{2}{3}\right)=-1-8=-9 \end{cases} \rightarrow P(-5,-5,-9)$$

La recta perpendicular al plano tendrá como vector director el vector normal al plano π y pasará por el punto P, por lo que:

$$\vec{n}_\pi = (5,-6,7), \quad P(-5,-5,-9)$$

La recta tendrá por ecuación paramétrica $t: \begin{cases} x=-5+5\lambda \\ y=-5-6\lambda \\ z=-9+7\lambda \end{cases}$

b)

Para calcular el ángulo necesitamos el vector director de la recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + 12\vec{k} = (6,9,12)$$

$$\vec{n}_\pi = (5,-6,7)$$

Por tanto: $\alpha = arcsen\left(\frac{|\vec{v_r}, \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r|, |\vec{n}_\pi|}\right)$=arcsen$\left(\frac{|30-54+84|}{\sqrt{36+81+144}\cdot\sqrt{25+36+49}}\right)$=arcsen$\left(\frac{60}{169.439}\right) = 19,82°$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. El 10% de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 ptos

b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 ptos

c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo? 0.5 ptos

Solución:

p es la proporción de población de Canarias que tiene alergia a la flor del olivo: p=0.1

Llamamos X al número de personas de la muestra elegida que tendrá alergia a la flor del olivo

Como con cada individuo de la muestra sólo se puede dar que tenga alergia o no y esto se repite con cada uno, siendo sucesos independientes, se puede afirmar que: la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros: n=100 y p=0.10

Además, como la cantidad de experiencias 100, la distribución binomial se podría aproximar por una distribución normal, si se dan las condiciones.

a) $p = 0.10,\ \ n = 100$

$$X \sim B(100{,}0.10)$$

Como $n \cdot p = 10\ y\ \ n \cdot q = 90 \geq 5$, podemos aproximar esta binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 3$

$$X \sim N(10{,}3)$$

$$P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12 - 10}{3}\right) = P(Z > 0.666) = 1 - P(Z \leq 0.666) = 0.2514$$

Existe una probabilidad de 0.25 de que en 100 canarios haya más de 12 alérgicos a la flor del olivo

b) De igual forma que antes, ahora elegimos una muestra de mayor tamaño: n=400, por lo que tenemos una nueva variable aleatoria Y, que contabiliza el número de personas alérgicas a la flor del olivo.

Los datos se modifican de la siguiente forma:

$p = 0.10,\ \ n = 400$

$$Y \sim B(400{,}0.10)$$

Además, como $n \cdot p = 40\ \ y\ n \cdot q = 360 \geq 5$, podemos aproximar esta binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 40$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6$.

$$Y \sim N(40{,}6)$$

$$P(X < 32) = P\left(Z < \frac{32 - 40}{6}\right) = P(Z < -1.33) = P(Z \geq 1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33)$$

$P(X < 32) = 1 - 0.9082$=0.0918

Por tanto, hay una probabilidad de 0.09 de que haya menos de 32 personas alérgicas a la flor del olivo

c) Si llamamos q a la probabilidad del suceso no poseer alergia a la flor del olivo, tenemos que q=0.9.

   Llamamos Z a la variable que contabiliza el número de personas que no son alérgicas a la flor del olivo.

   $E[Z] = \mu = n \cdot q = 500 \cdot 0.9 = 450$

   Por tanto, se espera que, en un grupo de 500 canarios, por término medio, haya 450 canarios que no tengan alergia a la flor del olivo.

4B. Una prueba, utilizada para determinar la presencia de plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos? 1 ptos

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5% de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos" 1 ptos

c) Si se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos? 0.5 ptos

Solución:

a) p es la proporción de test que dan resultado erróneo al aplicarlos: p=0.08

Llamamos X al número de test que dan resultado erróneo al aplicarlos

Como con cada test de la muestra sólo se puede dar que sea correcto o erróneo y esto se repite cada vez que se aplica, siendo sucesos independientes, se puede afirmar que: la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros: n=10 y p=0.08

Además, no se dan las condiciones para poder aproximar la distribución binomial a una normal: $n \cdot p = 10 \cdot 0{,}08 = 0.8 < 5$

$p = 0.08$; $q = 0.92$; $n = 10$. $X \sim B(10{,}0.08)$ sucesos independientes, con dos posibles resultados.

$$P(x = 3) = \binom{10}{3} 0.08^3 \cdot 0.92^7 = 0.0342$$

La probabilidad de encontrar exactamente 3 resultados erróneos es 0.034

b) $Afirmación$: En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5% de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos

Comprobamos cuál es la probabilidad de encontrar más de dos resultados erróneos:

$$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - \big(P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)\big)$$
$$= 1 - (0.4343 + 0.3777 + 0.1478) = 0.04$$

La probabilidad de encontrar más de dos test erróneos es de 0.04=4%, por lo que es menor al 5%.

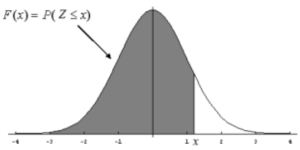
La afirmación es correcta

c) Si llamamos q a la probabilidad del suceso resultado correcto al aplicar el test, tenemos que q=0.92

Llamamos Z a la variable que contabiliza el número de test de respuesta correcta.

$E[Z] = n \cdot q = 100 \cdot 0.92 = 92$

Por lo que, cuando se realizan 100 test, se espera encontrar una media de 92 análisis correctos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767