UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x.$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} ax-2y+(a-1)z&=4\\ -2x+3y-6z&=2\\ -ax+y-6z&=6 \end{aligned}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a=1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ x\,e^{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi,2)$. Demuestre que existe un punto $x_0\in[0,1]$ de manera que $f(x_0)=2$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1\equiv x+y=1$ y $\pi_2\equiv x+z=1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0,2,0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de $\mathrm{NO_2}$ y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de $\mathrm{NO_2}$ superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de $\mathrm{NO_2}$, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

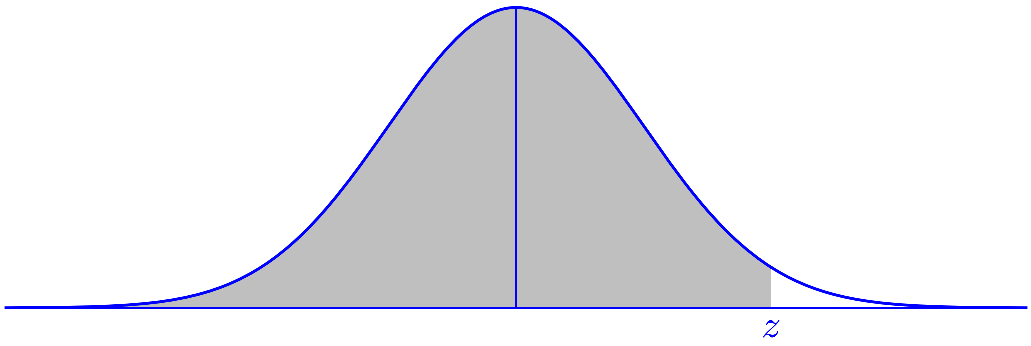
a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Por cada ecuación bien planteada: 0.5 puntos. Por la solución del sistema: 1 punto. Si se resuelve correctamente un sistema incorrecto: hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

Por hallar los puntos de corte: 0.75 puntos. Por plantear la integral correcta: 0.5 puntos. Por calcular la primitiva: 0.5 puntos. Por aplicar la Regla de Barrow: 0.5 puntos. Por el resultado correcto: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento modelo: 0.5 puntos. Por cada porcentaje pedido: 0.25 puntos.
b) Reconocer la binomial: 0.25 puntos. Parámetros correctos: 0.25 puntos. Expresión de la probabilidad: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo correcto: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

B.1.

a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Estudio correcto de cada uno de los tres casos: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes.

B.2.

a) Continuidad en $x = 0$: 0.25 puntos. Derivabilidad en $x = 0$: 0.5 puntos.
b) Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0.5 puntos. Demostración de la existencia del punto x_0: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos. Si halla solo una solución se penaliza con 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

B.4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace y las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

MATEMÁTICAS II
SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

Sea A, B y C el número de acciones de las correspondientes empresas que le tocan a cada hermano. Entonces:

$$\begin{cases} 3(A+B+C)=540 \\ 3\cdot(3A+1\cdot B+6C)=1560 \\ C=\frac{B}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+B+C=180 \\ 3A+B+6C=520 \\ B=2C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+3C=180 \\ 3A+8C=520 \end{cases}$$

$$A=180-3C \Longrightarrow 3(180-3C)+8C=520 \Longrightarrow \begin{cases} C=540-520=\boxed{20} \\ B=2C=\boxed{40} \\ A=180-3C=180-60=\boxed{120} \end{cases}$$

A.2.

Las curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ se cortan en los puntos cuya coordenada x verifica la ecuación

$$0=g(x)-f(x)=3x^2-5x-2 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6} \Rightarrow x=2,\ x=\frac{-1}{3}.$$

Para $x\in(-1/3,2)$, $g(x)<f(x)$ (ya que, por ejemplo, $g(0)=0<2=f(0)$). Por tanto, el área comprendida por las dos gráficas es

$$\int_{-1/3}^{2}(f(x)-g(x))dx=\int_{-1/3}^{2}(-3x^2+5x+2)dx=-x^3+\frac{5x^2}{2}+2x\Big|_{-1/3}^{2}=-8+10+4-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}=\frac{343}{54}.$$

A.3.

a) La recta r está en forma implícita y su vector director es $\overrightarrow{d_r}=(2,-1,1)$. El vector normal al plano π es $\overrightarrow{n}=(2,1,-1)$ y por tanto el seno del ángulo α que forman es $\operatorname{sen}(\alpha)=\dfrac{|\overrightarrow{d_r}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{d_r}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arcsen}(\frac{1}{3})\approx 19.47°$.

b) La recta r es $(x,y,z)=(1,-1,0)+\lambda(2,-1,1)$. El punto P de intersección entre la recta y el plano se obtiene para λ solución de $2(1+2\lambda)+(-1-\lambda)-\lambda+3=0$, es decir, $\lambda=-2\Rightarrow P(-3,1,-2)$. La recta s que pasa por P y es perpendicular al plano $z-y=0$, tiene por ecuaciones paramétricas $s\equiv\begin{cases} x=-3 \\ y=1-\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases}$. La recta s y el plano $z-y=0$ se cortan en el punto $M(-3,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2})$, que es el punto medio de PP'. Por tanto $P'(-3,-2,1)$.

c) El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π es: $\pi'\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow y+z+1=0$ y por tanto la recta proyección de r sobre π tiene por ecuación $\begin{cases} 2x+y-z+3=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$

A.4.

a) $T=$"tiempo de vida (en meses) de un individuo de esta especie tomado al azar"$\sim$ Normal$(\mu=8.8,\sigma=3)$. Con Z la distribución Normal$(0,1)$:

$$P(T>10)=P(Z>0.40)\approx 0.3446\Rightarrow \text{Un } 34.46\ \% \text{ de los individuos.}$$

$$P(7<T<10)=P(-0.60<Z<0.40)\approx 0.6554-0.2743=0.3811\Rightarrow \text{Un 38.11 \% de los individuos.}$$

b) Elegido al azar un individuo de esta especie $p=P(T\le 10)\approx 0.6554$. Tomados 4 individuos al azar, sus tiempos de vida serán independientes y así la variable X que contabiliza cuántos de estos 4 no han superado los 10 meses de vida es una Binomial$(4,p=0.6554)$. Se pide

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-(1-0.6554)^4=1-0.3446^4\approx 0.985898637.$$

c) $P(8.8-c\le T\le 8.8+c)=0.98\Leftrightarrow P\big(0\le Z\le\frac{c}{3}\big)=0.49$. De la tabla de la Normal$(0,1)$ se tiene $\frac{c}{3}\approx 2.33$ y así $c\approx 6.99$ es el valor buscado.

B.1.

a) $|A| = 3a^2 - 29a + 26 \Rightarrow a = 1$ y $a = \dfrac{26}{3}$.
Si $a \neq 1$ o $\frac{26}{3} \Rightarrow$ Sistema compatible determinadod
Si $a = \frac{26}{3} \Rightarrow$ Sistema incompatibled
Si $a = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
b)

$$\left.\begin{aligned} x - 2y = 4 \\ -y - 6z = 10 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $(-16 - 12t, -10 - 6t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

B.2.

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ así que f es continua en cero. Por lo que se refiere a la derivabilidad,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ (L'Hôpital) y } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1,$$

por tanto, f es derivable en $x = 0$.
b) Para $-\pi < x < 0$, $f'(x) = \cos x$, y se tiene que f es decreciente en $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ y creciente en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Para $x > 0$, $f'(x) = e^x(x + 1) > 0$, así que f es creciente en $(0, 2)$, y por ser continua en $x = 0$ lo es en $(-\frac{\pi}{2}, 2)$. Para la segunda parte, basta aplicar el teorema de Bolzano ya que f es continua, $f(0) = 0$ y $f(1) = e > 2$.
c)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen} x dx + \int_0^1 xe^x dx$. La función $F = -\cos x$ es una primitiva de $\operatorname{sen} x$, mientras que integrando por partes obtenemos que $G(x) = e^x(x-1)$ lo es de xe^x. Por Barrow, la integral pedida es $F(0) - F(-\frac{\pi}{2}) + G(1) - G(0) = 0$.

B.3.

a) Los planos que son paralelos a $x + y = 1$ son de la forma $x + y = D$, la distancia del origen a un plano que cumpla la ecuación anterior será $\dfrac{|D|}{\sqrt{2}} = 2$, esto implica que $D = \pm 2\sqrt{2}$. Por tanto los planos son $x + y = 2\sqrt{2}$ y $x + y = -2\sqrt{2}$.
b) Una recta perpendicular al plano $x + z = 1$ tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$ y si corta al eje y en $y = 2$ pasa por el punto $(0, 2, 0)$. Por tanto la ecuación de la recta será $(x, y, z) = (\lambda, 2, \lambda)$.
c) Los puntos de intersección con los ejes x e y son los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ respectivamente. La distancia entre ellos es $\sqrt{2}$.

B.4.

a) Sean los sucesos $N =$"en un día se supera el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$" y $P =$"en un día se supera el nivel permitido de partículas". Se sabe que $P(N) = 0.16$, $P(P|N) = 0.33$ y $P(P|\overline{N}) = 0.08$. Entonces $P(N \cap P) = P(P|N) \cdot P(N) = 0.33 \cdot 0.16 = 0.0528$.
b) $P(P) = P(P|N)P(N) + P(P|\overline{N}) \cdot P(\overline{N}) = 0.0528 + 0.08 \cdot (1 - 0.16) = 0.12$.
$P(P \cup N) = P(P) + P(N) - P(P \cap N) = 0.12 + 0.16 - 0.0528 = 0.2272$.
c) P y N no son independientes, ya que $P(P \cap N) = 0.0528$ y $P(P) \cdot P(N) = 0.12 \cdot 0.16 = 0.0192$ no coinciden.
d) $P(N|\overline{P}) = \dfrac{P(N \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{P(N) - P(N \cap P)}{1 - P(P)} = \dfrac{0.16 - 0.0528}{1 - 0.12} \approx 0.1218$.