EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(2)
Convocatoria:	

Instrucciones:
- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

GRUPO A

1. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:
   a. Calcule: $\int_0^{\pi/2} xcosx\, dx$
   b. Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^3+5x^2}{x^2-1}$

Solución

a. $\int_0^{\pi/2} xcosx\, dx$

Se calculará la integral indefina por partes:

Llamamos $\begin{cases} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = cosx \Longrightarrow v = \int cosx\, dx = senx \end{cases}$

Luego aplicando la fórmula de integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int vdu$ obtenemos:

$$\int xcosx\, dx = xsenx - \int senx\, dx = xsenx + cosx + C$$

Entonces aplicando teorema fundamental del cálculo: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$
Atendiendo a los límites de integración tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} xcosx\, dx = [xsenx + cosx]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - [0sen(0) + cos(0)] =$$

$$\int_0^{\pi/2} xcosx\, dx = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} = 0.57$$

b. Estudie las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^3+5x^2}{x^2-1}$

Asíntotas Verticales

Se determina para qué valores se anula el denominador.

$$x^2 = 1 \;\rightarrow x_1 = 1 \; y \; x_2 = -1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1} = \dfrac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntota Vertical en x = 1.

$$\lim_{x\to -1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

Asíntota Vertical en x = -1.

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2}{x^2-1} = \infty; \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+5x^2}{x^2-1} = -\infty$$

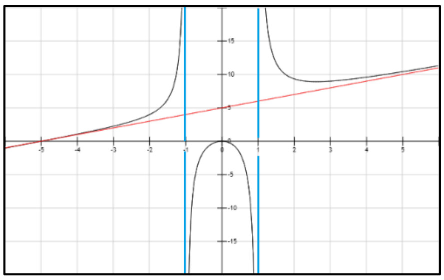
No existen asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1}}{x} = \frac{x^3+5x^2}{x^3-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2}{x^2-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2-x^3-x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-x}{x^2-1} = 5$$

Existe una asíntota oblicua dada por la recta y = x + 5.



2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X \cdot A - C^t = X \cdot B$

a. Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.

b. Hallar la matriz *X* que cumple la ecuación.

Solución

a.

La operación de diferencia de matrices entre el producto de XA y la matriz C ha de ser posible, por tanto tomando en consideración lo siguiente:

- La dimensión de la matriz C es 3x2 (3 filas y 2 columnas), pero su traspuesta será 2x3. El producto XA ha de tener está misma dimensión 2x3 (2 filas y 3 columnas). De aquí se infiere que el número de filas de X ha de ser 2.
- La dimensión de la matriz A es 3x3 (3 filas y 3 columnas). Para poder multiplicar X por A el número de columnas de X ha de ser igual al número de filas de A. De aquí se concluye que el número de columnas de X ha de ser 3.

Por tanto para que las operaciones tengan sentido la dimensión de la matriz X ha de ser 2x3.

b.

Despejar la matriz $X = C^t(A - B)^{-1}$

Hallar $D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos $\det(A - B) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists (A - B)^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} D_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad D_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \; D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ D_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad D_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \; D_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad D_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \; D_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow Adj(D)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

su inversa $(D)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Efectuar la multiplicación

$$X = C^t(D)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma

Hallar $D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X \cdot D = C^t$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 & \mathrm{X}_2 & \mathrm{X}_3 \\ \mathrm{X}_4 & \mathrm{X}_5 & \mathrm{X}_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\mathrm{X}_1 = -1 \rightarrow \mathrm{X}_1 = 1$$

$$-\mathrm{X}_2 = -3 \rightarrow \mathrm{X}_2 = 3$$

$$\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_3 = 6 \rightarrow \mathrm{X}_3 = 6 - 1 = 5$$

$$-\mathrm{X}_4 = 0 \rightarrow \mathrm{X}_4 = 0$$

$$-\mathrm{X}_5 = -1 \rightarrow \mathrm{X}_5 = 1$$

$$\mathrm{X}_6 = 0$$

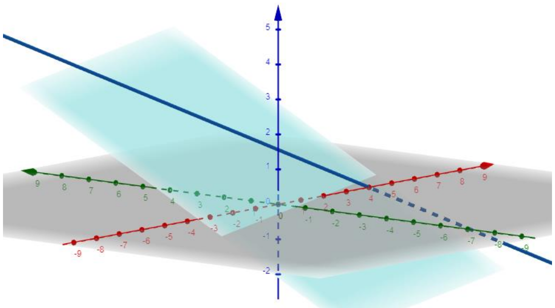
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, y dado el plano $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$
   a. ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π?
   b. Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π

Solución

a.

Se determinará que la recta *r* no pertenece al plano π y es paralela a dicho plano.
$r // \pi \rightarrow \overrightarrow{v_r} // \overrightarrow{n_\pi}$



Se halla el vector director de la recta *r*

$$r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \text{o bien } \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

$\overrightarrow{v_r} = (-2,1,1)$

Se halla el vector normal al plano $\pi \overrightarrow{n_\pi} = (1,-3,5)$

Se determina si los vectores son perpendiculares

$\overrightarrow{v_r} \cdot \ \overrightarrow{n_\pi} = (-2,1,1) \cdot (1,-3,5) = -2 - 3 + 5 = 0$

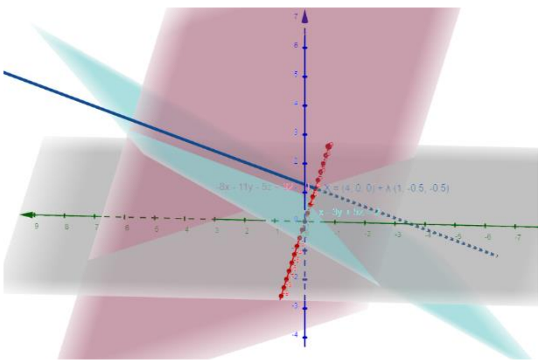
Se comprueba que la recta *r* no pertenece al plano π sustituyendo un punto cualquiera de *r* en la ecuación del plano. Por ejemplo para $\lambda = -2$ el punto de la recta *r* es A = (4,0,0), y sustituyendo en $\pi \equiv 4 - 3(0) + 5(0) \neq 2$, luego *r* no pertenece al plano.

En conclusión, la recta *r* es paralela al plano π

b) Calcular el plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π
Utiliza $\overrightarrow{v_r}$ como vector del plano π'
n es vector director del plano
Calculamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo el punto (4,0,0)

La ecuación del plano π' viene dada por

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



$$-3(x-4) - 10y + z - 6z - 5(x-4) - y = 0$$

$$-3x + 12 - 10y + z - 6z - 5x + 20 - y = 0$$

$$-8x - 11y - 5z + 32 = 0$$

4. Si una bombilla fluorescente tiene un 90% de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:
    a. Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas.
    b. La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7
    c. El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10

Solución
a.

Se define la variable binomial *X*: “número de bombillas que tienen una vida útil de al menos 800 horas de 20 bombillas”
Eventos independientes
Éxito: que una bombilla tenga una vida útil de al menos 800 horas,
p = 0.9, *q* = 0.1
X~B(*n, p*) = B(20, 0.9)

$$P(X = 18) = \binom{20}{18}(0.9)^{18}(0.1)^2 = \frac{20!}{18!(20-18)!}(0.9)^{18}(0.1)^2 = 0.2851$$

Existe un 28.5% de probabilidades de que exactamente 18 bombillas de 20 tengan una vida útil de al menos 800 horas. Por lo que la afirmación **no es cierta.**

b.

Definimos la variable binomial *Y* = “número de bombillas que no tengan una duración de al menos 800 horas de 20”
Eventos independientes
Éxito: que una bombilla no tenga una duración de al menos 800 horas *p* = 0.1, *q* = 0.9

Y~B(*n, p*) = B(20, 0.1)

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) =$$
$$= \binom{20}{0}(0.1)^0(0.9)^{20} + \binom{20}{1}(0.1)(0.9)^{19} + \binom{20}{2}(0.1)^2(0.9)^{18} =$$
$$= \frac{20!}{0!(20)!}(0.1)^0(0.9)^{20} + \frac{20!}{1!(19)!}(0.1)(0.9)^{19} + \frac{20!}{1!(18)!}(0.1)^2(0.9)^{18} = 0.6769$$

Existe un 67.7% de probabilidades de que 2 o menos bombillas de 20 no tengan una duración de al menos 800 horas. Por lo que la afirmación **es cierta.**

c. *np* = 90

La afirmación **no es cierta**.

GRUPO B

1. Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva $f(x) = \frac{bx-1}{bx+1}$ en el punto de abscisa x = 0
   Escriba las funciones que se obtienen.

Solución

La pendiente de la recta $y = 6x + a$ es *m* = 6

Otra forma sería que como la recta $y = 6x + a$ es tangente a la curva $f(x)$ en *x* = 0 → $f'(0) = 6$

Se halla la derivada de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{b(bx+1)-(bx-1)b}{(bx+1)^2} = \frac{b^2x + \mathrm{b} - b^2x + \mathrm{b}}{(bx+1)^2} =$$

$$= \frac{b(bx+1-bx+1)}{(bx+1)^2} = \frac{2b}{(bx+1)^2}$$

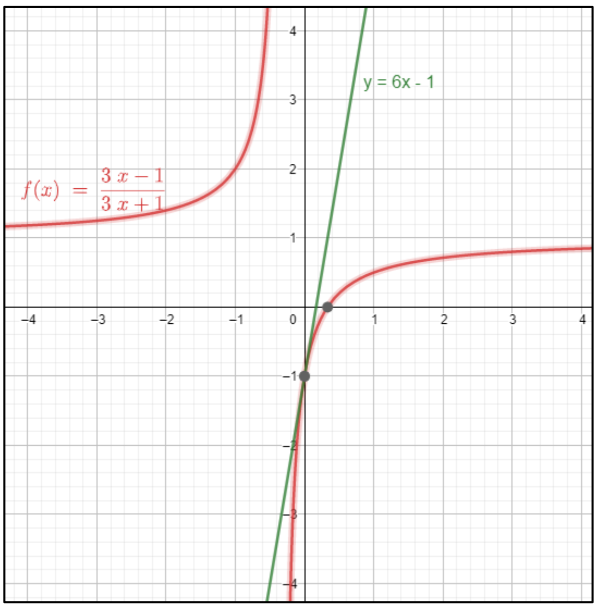
Se evalúa $f'(0) = 2b$ y sabiendo que $f'(0) = 6 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$

La recta y la función coinciden en el punto de tangencia de abscisa *x* = 0

$$\begin{cases} y = 6(0) + a \\ f(0) = -1 \end{cases} \rightarrow a = -1$$

Las funciones que se obtienen son:

- $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$
- $y = 6x - 1$



2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\}$$

   a. Discuta el sistema según los valores del parámetro k
   b. Resuelva el sistema para $k = 0$

Solución

a.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada $A|b = \begin{pmatrix} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{pmatrix}$

Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes *A*

$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix} = 6k^2 + 12k + 16 - (12k + 4k^2 + 24) = 2k^2 - 8 \rightarrow k = \pm 2$

<u>Discusión del Sistema de ecuaciones según el parámetro *k*</u>

- Si *k*≠ $\pm$2

Rang*A* = Rang*A/b*

Sistema compatible determinado con solución única

- Si *k* = 2

Entonces el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces Rang *A* = 2

La matriz ampliada $A/b = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 Rango *A/b* = 2

Por lo que Rang*A* = Rang*A/b* = 2 < número de incógnitas = 3

Sistema compatible indeterminado.

- Si $k = -2$

Entonces el determinante $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces Rang *A* = 2

La matriz ampliada $A/b = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ y como:

$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 24 - (24 + 48) = -128 \neq 0,$

entonces Rang *A/b* = 3

Rang*A*≠ Rang *A/b*

Sistema Incompatible

b.

Tenemos el sistema,

$$\left.\begin{array}{r} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2x + 6z = -2 \end{array}\right\}$$

Cuya matriz de coeficientes es Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

siendo su determinante $|A| = -8$

Resolviendo por la regla de Cramer (*o cualquier otro método*)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-16 - 24}{-8} = \frac{-40}{-8} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{6(-8)}{-8} = \frac{-48}{-8} = 6$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{8 + 8}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

Solución del sistema: **(5,6,-2)**

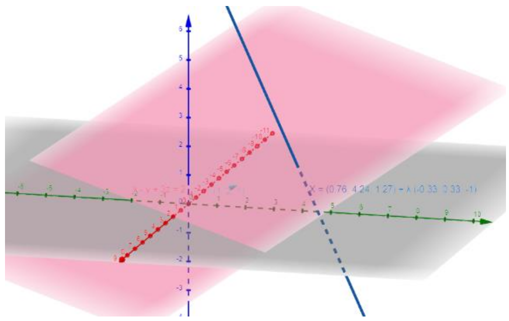
3. Consideremos el punto $A(1,2,1)$, y la recta $r: \begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$
   a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r.
   b. Consideremos $P\,(1,4,2)$, un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución

a.

Hallamos el vector director de la recta *r*:

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,3)$$



Entonces las ecuaciones paramétrica y continua de la recta *r* (*no se piden y no se evalúan*)

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = 2+3t \end{cases} \text{ o bien, } x-1 = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

Como *r* es perpendicular a π, entonces $\vec{n}_{\boldsymbol{\pi}} = \vec{v}_r = (1,-1,3)$

Entonces la ecuación del plano π será: $x - y + 3z + d = 0$

Como A$(1,2,1) \in \pi \Longrightarrow 1\cdot 1 - 2 + 3\cdot 1 + d = 0 \Longrightarrow d = -2$

Luego $\boldsymbol{\pi \equiv x - y + 3z - 2 = 0}$

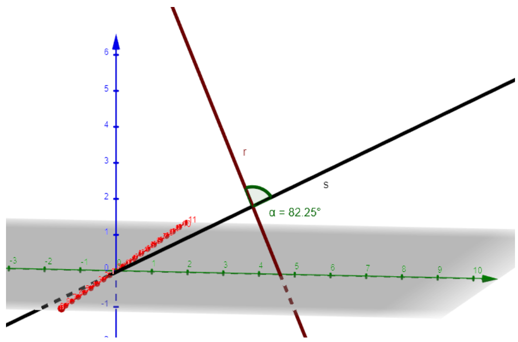
b.

Dado que las rectas contienen el punto A en común, son rectas secantes. No son coincidentes ni paralelas porque los vectores no son proporcionales.

$\overrightarrow{AP}(0,2,1);\ \vec{u}_r(1,-1,3)$

Cos $(\alpha) = \frac{-2+3}{\sqrt{5}\sqrt{11}} = 0.1348;$

$\alpha = arcos(0.1348) = 82.25$º

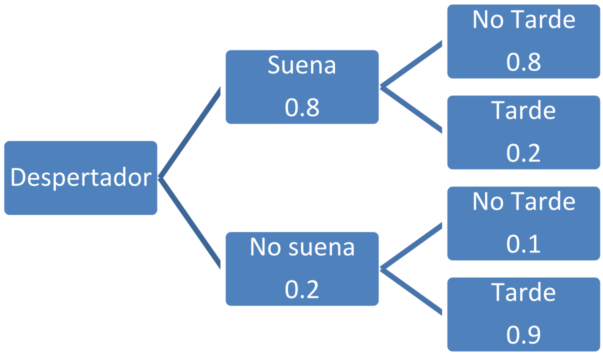


4. Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20% de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9
    a. Represente el diagrama de árbol del problema.
    b. Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%.
    c. Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5
    d. Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Solución

a.
Definimos los eventos:

S: El despertador suena
NS: El despertador no suena
T: Llega tarde a clases
NT: No llega tarde a clases



b.

Aplicamos la regla del producto para calcular la probabilidad de ocurrencia simultánea:

$$P(T \cap S) = P(S) \cdot P(T/S) = (0.8) \cdot (0.2) = 0.16$$

Existe un 16% de probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador. **Por lo que la afirmación no es cierta**.

c.

Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(NT) = P(S)P(NT/S) + P(NS)P(NT/NS) =$$
$$(0.8)\ (0.8) + (0.2)\ (0.1) = \ (0.64)\ (0.02) = 0.66$$

Existe un 66% de probabilidad de que no llegue tarde a clases. **Por lo que la afirmación no es cierta**.

d. Si un día llegó tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

$$P(S/T) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{0.16}{1 - 0.66} = \frac{0.16}{0.34} = 0.4705$$

La probabilidad de que, habiendo llegado tarde a clase, el despertador haya sonado es de 0.4705.