EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II		**(3)**
	Convocatoria:	

Instrucciones:
. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA
OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

OPCIÓN A

1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de $a,\ b$ **y** c **sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:**

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa $x = 0$ **y** $x = -2$

- La función corta el eje *OX* en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante.

SOLUCIÓN

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = -2$

$\rightarrow f'(0) = 0 \ y \ f'(-2) = 0$

Hallamos la primera derivada de la función $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2bx + c$

Evaluamos,

$f'(0) = c = 0$

$f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0 \rightarrow 3a - b = 8 \ (I)$

- La función corta el eje *OX* en el punto

$x = 1 \rightarrow f(1) = 1 + a + b + 7 = 0 \rightarrow a + b = -8 \ (II)$

Resolvemos el sistema de ecuaciones,

$\begin{cases} 3a - b = 8 \\ a + b = -8 \end{cases} \rightarrow a = 0 \ y \ b = -8$

Siendo la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

2. Dado el sistema:

$$2x + y + 3z = 2\ 5x + 2y + 4z =- 1\ 3x + y + k^2z = 3k \}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro *k*

b) Resolverlo para $k = 2$

SOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son:

$A = \big(2 \quad 1 \quad 3\ 5 \quad 2 \quad 4\ 3 \quad 1 \quad k^2\big)$; $\qquad A^* = (2 \quad 1 \quad 3 \quad 2\ 5 \quad 2 \quad 4 \ - 1\ 1 \quad 1 \quad k \quad 3k)$

Calculemos el determinante de *A* y los valores de a que lo anulan.

$|A| = \big|2 \quad 1 \quad 3\ 5 \quad 2 \quad 4\ 3 \quad 1 \quad k^2\big| = 1 - k^2$, entonces: $|A| = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$

Por otro lado: $|2 \quad 1 \quad 2\ 5 \quad 2 \ - 1\ 3 \quad 1 \quad 3k| =- 3k - 3$ que será 0 para $k =- 1$

Por otro lado el menor $|2\ 1\ 5\ 2| =- 1 \neq 0$

Si $k \neq \pm 1$, entonces Rang (*A*) = 3 = Rang(A^*) = nº de incógnitas = 3

Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Si $k = 1$, entonces: Rang(*A*) = 2 ≠Rang(A^*) = 3, entonces por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

Si $k =- 1$, Rang (*A*) = 2 = Rang(A^*) < nº de incógnitas,

Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado tendrá infinitas soluciones.

b) Para *k* = 2 tenemos el sistema

$$2x + y + 3z = 2\ 5x + 2y + 4z =- 1\ 3x + y + 4z = 6 \}$$

Como $|A| = 1 - a^2 = 1 - 4 =- 3$, el sistema es compatible determinado

Resolviendo por la Regla de Cramer (*o cualquier otro método*)

$x = \frac{|2\ 1\ 3\ -1\ 2\ 4\ 6\ 1\ 4|}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$; $\quad y = \frac{|2 \quad 2 \quad 3\ 5 \ -1 \quad 4\ 3 \quad 6 \quad 4|}{-3} = \frac{27}{-3} =- 9$;

$z = \frac{|2 \quad 1 \quad 2\ 5 \quad 2 \ -1\ 3 \quad 1 \quad 6|}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$

Y la solución es (1, -9, 3)

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \ y \ \pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$

- pasa por el punto $P(2, \ -1, \ 5)$

SOLUCIÓN

Vector normal al plano π_1 $\quad \vec{n}_{\pi_1} = (1, 3, -1)$

Vector normal al plano π_2 $\quad \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, 3)$

Si $r // \pi_1$ y $r // \pi_2 \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8i - j + 5k \rightarrow \vec{v}_r = (-8, -1, 5)$$

La ecuación de la recta que pasa por P(2, -1, 5) con dirección $\vec{v}_r = (-8, -1, 5)$ es

$$r \equiv (x, y, z) = (2, -1, 5) + t(-8, \ -1, \ 5) \text{ o } r \equiv \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

(*solo hallar una ecuación*)

4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que notraen su propia bolsa son mujeres.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

SOLUCIÓN

Definimos los eventos

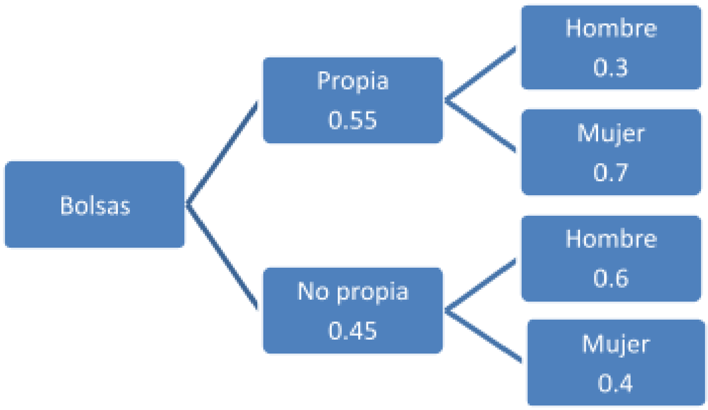
P: Que la bolsa de los clientes es propia

NP: Que la bolsa de los clientes no es propia

M: Que el cliente es mujer

H: Que el cliente es hombre

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado



b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

Por el Teorema de la probabilidad total

P(M)=P(P)P(M/P)+P(NP)+P(M/NP)= (0.55) (0.7) + (0.45)(0.4) =0.565

El 56.5% de los clientes que entran al supermercado traigan o no su propia bolsa son mujeres.

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Aplicando el Teorema de Bayes

$$P(P/H) = \frac{P(P)P(H/P)}{P(H)} = \frac{(0.55)(0.3)}{1-0.565} = 0.379$$

Existe un 38% de probabilidades de que un cliente elegido al azar, siendo hombre, haya traído su propia bolsa

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II		**(3)**
	Convocatoria:	

Instrucciones:
. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN B

1. Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$

a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores.

b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas.

c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas.

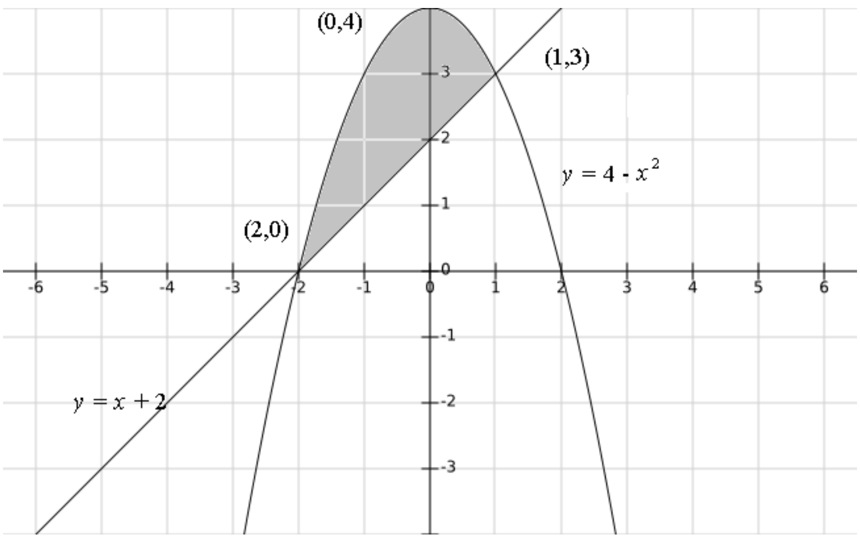
SOLUCIÓN

a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores

$$4 - x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \quad o \quad x = -2$$

Siendo los puntos de intersección $(-2, 0)$ y $(1, 3)$

b) Esbozar el gráfico de ambas.



c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas

Plantear la integral y límites integración correctos $A = \int_{-2}^{1} \left[\left(4 - x^2\right) - (x + 2)\right]dx$

Integrar y evaluar la integral $\int_{-2}^{1} (- x^2 - x + 2)dx = \left(- \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)1 \ - 2 \ = \frac{11}{2}u^2$

2. Sea la matriz $C \ = \ A \cdot B$, donde:

$$A = (1\ 2\ m\ 1 \ - 1 \ - 1\ ) \ y \ \ B = (1\ 2\ m\ 0\ 0\ 2\ )$$

a) Encontrar los valores de *m* para los que existe inversa de la matriz *C*

b) Calcular la matriz inversa de *C* en el caso de $m = 2$

SOLUCIÓN

a) Encontrar los valores de *m* para los que *C* tenga inversa.

SOLUCIÓN

$C = A{\cdot}B = (1\ 2\ m\ 1 \ - 1 \ - 1\ ){\cdot}(1\ 2\ m\ 0\ 0\ 2\ ) = (2m + 1\ 2 + 2m\ 1 - m\ 0\ )$

$\exists C \Leftrightarrow |C| \neq 0$hallamos el determinante de la matriz C

$|C| = |2m + 1\ 2 + 2m\ 1 - m\ 0\ | = 2m^2 - 2$

$|C| = 2m^2 - 2 = 0$si$m \neq \pm 1$

Por tanto, $\exists C^{-1} \forall\ m \in R - \{- 1, 1\}$

b) Calcular la matriz inversa de *C* para $m = 2$

Para *m* = 2 $C = (5\ 6 \ - 1\ 0\ )$y$|C| = 6$

$C^{-1} = \frac{Adj(C)^t}{|C|} Adj(C) = (0\ 1 \ - 6\ 5\ ) Adj(C)^t = (0 \ - 6\ 1\ 5\ )$

$C^{-1} = \frac{1}{6}(0 \ - 6\ 1\ 5\ ) = (0 \ - 1\ 1/6\ 5/6\ )$

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \{x = 1 - t\ y = t\ z = t \quad y \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1$$

SOLUCIÓN

Vector normal al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0 \quad \vec{n}_\pi = (2, - 1, 1)$

Vector dirección de la recta r $\vec{v}_r = (- 1, 1, 1)$

Vector dirección de la recta *s* $\vec{v}_s = (-2, 0, 1)$

Comprobar posición relativa de las rectas *r* y *s*

Ecuaciones de las rectas *r* y *s* como intersección de dos planos

$r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ $\quad r \cap s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = 3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{col1} = \text{col4} \rightarrow \left|A^*\right| = 0 \rightarrow \text{Rang}(A^*) = 3$$

Como $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^*) =$ número de incógnitas, es un sistema compatible determinado, las rectas se cortan.

Sea *π'* el plano que contiene a las rectas *r* y *s*, el vector normal a dicho plano viene dado por,

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j + 2k \rightarrow \vec{n}_{\pi'} = (1, -1, 2)$$

El ángulo que forman los planos *π* y *π'* es,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'}}{\|\vec{n}_{\pi}\| \|\vec{n}_{\pi'}\|} = \frac{5}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})} = \frac{5}{6} \rightarrow \alpha = 33.5^{o}$$

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1año.

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

SOLUCIÓN

Se define la variable normal X: "periodo de vida en meses de ventiladores de CPU"

X ~ *N* (18, 3.6)

a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

$P(X < 16) = P(Z < \frac{16-18}{3.6}) = P(Z < -0.56) = 1 - P(Z < 0.56) = 1 - 0.7123 = 0.2877$

Existe un 28.77% de probabilidades de que un ventilador funcione, como mucho, 16 meses.

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año.

$P(X > 12) = P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67) = 0.9525$

Existe un 95.25% de probabilidades de que un ventilador funcione al menos un año.

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

$P(12 < X < 24) = P(-1.66 < Z< 1.66) = 0.9515 – (1 – 0.9515) = 0.903$

Existe un 90% de probabilidades de que un ventilador funcione entre 1 y 2 años.