Modelo 1

<u>Nota sobre la puntuación de las preguntas:</u> Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

OPCIÓN A

1.- Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

Criterios

Sean los tres trozos x, y, z.

- Uno de ellos es el doble de otro: $y = 2x$

- Los tres juntos han de medir 140 m:

$x + y + z = 140 \Longrightarrow z = 140 - x - y = 140 - x - 2x = 140 - 3x$ **(0.25 puntos)**

- Función a optimizar (si cada trozo forma un cuadrado, el lado será la cuarta parte de la longitud del trozo correspondiente):

$A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2$ **(0,75 puntos)**

$A' = 2\left(\frac{x}{4}\right)\frac{1}{4} + 2\left(\frac{2x}{4}\right)\frac{2}{4} + 2\left(\frac{140-3}{4}\right)\frac{-3}{4} = \frac{1}{16}(-840 + 28x)$ **(0,5 puntos)**

$A' = 0 \Longrightarrow \frac{1}{16}(-840 + 28x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{840}{28} = 30$ **(0,5 puntos)**

$A'' = \frac{28}{16} > 0 \Longrightarrow x = 30$ es un mínimo. **(0,25 puntos)**

Los tres trozos son:

$\boxed{x = 30 \;\; ; \;\; y = 2x = 60 \;\; ; \;\; z = 140 - 3x = 140 - 90 = 50}$ **(0,25 puntos)**

2.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + ky + kz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k. **(1.25 ptos)**

b) Resolver el sistema para $k = 1$ **(1.25 ptos)**

Criterios

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k.

$$\left.\begin{array}{r} x+ky+kz=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow Sea\ M=\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\ y\ M^*=\begin{pmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ **(0.25 ptos)**

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes M, **(0.25 ptos)**

$$\det(M)=|M|=\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4+2k+k-k-2-4k=2-2k$$

Calculemos ahora el valor de k para que el determinante sea nulo

$2-2k=0 \Rightarrow k=1$ **(0.25 ptos)**

Estudiemos dos casos:

- Si $k=1$ $(\det(M)=0)$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} y\ M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango de la matriz de coeficientes (y, por tanto, el de la matriz ampliada) es 2, ya que la primera y segunda fila son iguales y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0$

por lo tanto, tenemos que: $\text{rang}(M)=\text{rang}(M^*)=2<3=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado** (infinitas soluciones) **(0.25 ptos)**

- Si $k\neq 1$ $(\det(M)\neq 0) \Rightarrow \text{rang}(M)=\text{rang}(M^*)=3=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado** (una única solución) **(0.25 ptos)**

b) Resolver el sistema para $k = 1$ **(1 pto)**

$$M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 0z=0 \\ y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 0z=0 \\ y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\lambda \qquad y=1-3\lambda \qquad x=1-(1-3\lambda)-\lambda=2\lambda$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{x=2\lambda} \\ \boldsymbol{y=1-3\lambda} \\ \boldsymbol{z=\lambda} \end{array}$$ (0.25 ptos)

3.- a) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos A (-1,5,0) y B (0,1,1) y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases}$

b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$

Criterios

a) Hallamos la ecuación del plano π

Hallamos el vector director de r **(0.75 ptos)**

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6i+9j+6k \Rightarrow \vec{v}_r = (-6,9,6) \quad o \quad \vec{v}_r = (-2,3,2)$$

Hallamos el vector $\overline{AB} = (1,-4,1)$ **(0.25 ptos)**

El plano π viene determinado por los vectores $\vec{v}_r = (-2,3,2)$ y $A\vec{B} = (1,-4,1)$ y el punto A o B

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} (x+1) & (y-5) & z \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \pi \equiv 11x+4y+5z-9=0$$ **(0.5 ptos)**

b) Hallamos el punto medio del segmento $\overline{AB}$; M (-1/2, 3, 1/2) **(0.25 ptos)**

Hallamos la ecuación de la recta paralela a r y que pasa por el punto medio M (-1/2,3,1/2)

Ecuación general: $r: \dfrac{x+\frac{1}{2}}{-2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{2}$ **(0.75 ptos)**

4.- Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador?

Criterios

a) Definimos la variable X: "número de fallos por error del operador en 20 fallos en plantas químicas" “éxito”: que ocurra un fallo por error del operador, probabilidad de un éxito $p = 0.3$, de un fracaso $q = 0.7$ **(0.25 ptos)**

X sigue una distribución binomial $X \sim B(n, p) = B(20, 0.3)$

a) $P(X=5)=\binom{20}{5}p^5q^{15}=\frac{20!}{(5!)(15!)}(0.3)^5(0.7)^{15}=0.1788$ **(1 pto)**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallas de 20 encontradas en una planta química se deban a errores del operador?

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X\leq 1)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=$ **(0.75 ptos)**

$$=1-\left[\binom{20}{0}p^0q^{20}+\binom{20}{1}p^1q^{19}\right]=1-\left[\frac{20!}{(0!)(20!)}(0.3)^0(0.7)^{20}+\frac{20!}{(1!)(19!)}(0.3)^1(0.7)^{19}\right]=$$

$=1-0.0076=0.9924$ **(0.5 ptos)**

Modelo 1

OPCIÓN B

1.- Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = 3x + \dfrac{3x}{x-1}$

Criterios

- Comprobemos si tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Se tiene:
  $\lim_{x\to 1^-}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = 3 + \frac{3}{0^-} = -\infty$
  $\lim_{x\to 1^+}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = 3 + \frac{3}{0^+} = +\infty$
  Luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. **(0,5 puntos)**

- Veamos si tiene asíntotas horizontales:
  $$\lim_{x\to -\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1}\right) = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{-\infty}{1-0} = -\infty$$
  $$\lim_{x\to +\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$
  Por tanto, no tiene asíntotas horizontales. **(0,5 puntos)**

- Asíntotas oblicuas $y = mx + n$.
  $$m = \lim_{x\to +\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x}{x} + \frac{3x}{x(x-1)}\right) = 3 + 0 = 3$$
  $$m = \lim_{x\to -\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x}{x} + \frac{3x}{x(x-1)}\right) = 3 + 0 = 3$$
  $$n = \lim_{x\to +\infty}(y - mx) = \lim_{x\to +\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = 3$$
  y en $-\infty$
  $$n = \lim_{x\to -\infty}(y - mx) = \lim_{x\to -\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = 3$$
  Luego la recta $y = 3x + 3$ es una asíntota oblicua. **(0,5 puntos)**

- Para calcular los extremos se tiene:
  $y' = 3 + \frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2} = 3 + \frac{-3}{(x-1)^2} = \frac{3x(x-2)}{(x-1)^2}$ **(0,5 puntos)**

Si igualamos $y' = 0$ obtenemos $3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$ que son los puntos críticos. Hallamos la segunda derivada y calculamos los valores de y'' en los puntos críticos.

$$y'' = \frac{6}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} y''(0) = \frac{6}{(-1)^3} = -6 < 0 \Rightarrow \textit{máximo en } (0, y(0)) = (0,0) \\ y''(2) = \frac{6}{1^3} = 6 > 0 \Rightarrow \textit{mínimo en } (2, y(2)) = (2,12) \end{cases}$$

(0,5 puntos)

2.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa

b) Para m = 1, calcular la matriz inversa A^{-1}

Criterios

a) Calculemos cuales son los valores de m que hacen que A sea una matriz singular, es decir los valores que anulan al determinante de A, ($|A|=0$)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(m-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix}=(m-2)\cdot(m+1) \Longrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (m-2)\cdot(m+1)=0 \Longrightarrow \boldsymbol{m_1=2},\ \boldsymbol{m_2=-1}.$ **(0.5 ptos)**

Entonces A tendrá inversa, es decir, será regular: $\forall\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}-\{\mathbf{2},\mathbf{-1}\}$. **(0.5 ptos)**

b) Para $m=1$, la matriz A será

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ entonces: } |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot 2=-2\neq 0$$

Es decir: $\exists\, A^{-1}=\frac{[Adj(A)]^t}{|A|}$, de donde, **(0.5 ptos)**

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}=0;\ A_{12}=-2;\ A_{13}=2 \\ A_{21}=0;\quad A_{22}=-1;\ A_{23}=0 \\ A_{31}=2;\quad A_{32}=-2;\ A_{33}=2 \end{array}\right\} \Longrightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow [Adj(A)]^t=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ **(0.5 ptos)**

Es decir,

$$A^{-1}=\frac{[Adj(A)]^t}{|A|}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **(0.5 ptos)**

3.- Dados los planos: $\pi_1: x+y+z-5=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=3+\lambda+2\mu \\ y=1-\lambda-\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$

a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica.

b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2

Criterios

a) Hallamos la ecuación general del plano

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y-z-3=0$$ **(0.25 ptos)**

Discutir el sistema $\begin{cases} \pi_1 : x+y+z-5=0 \\ \pi_2 : x+y-z-3=0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $rgA = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ $A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $rg(A/b)=2$ **(0.25 ptos)**

Los planos se cortan en una recta. **(0.25 ptos)**

Hallando la ecuación de la recta intersección de los planos.

Hallamos la solución general del sistema $\begin{cases} x+y+z-5=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=5-y \\ x-z=3-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=4-y \end{cases}$;Sol part $y=0$ $P(4,0,1)$ **(0.5 ptos)**

La recta pasa por $P\ (4,0,1)$

Y vector director viene dado por $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i+j \Rightarrow \vec{v}_r = (-1,1,0)$ **(0.25 ptos)**

La ecuación paramétrica de la recta es: $\begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ **(0.25 ptos)**

b) Ecuación del plano π_3 que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y es perpendicular a π_1 y π_2

$$\pi_3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-y=0$$ **(0.75 ptos)**

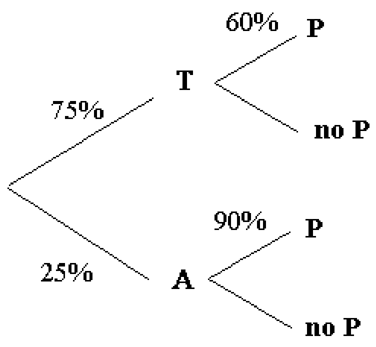
4.- El 75% de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Se pide:

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase?

b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando?

Criterios

Diagrama de árbol



Definimos los siguientes sucesos:

T = {el alumno acude a clase usando transporte}

A = {el alumno acude a clase andando}

P = {el alumno llega puntual a clase}

a) Vamos a calcular la probabilidad de que un alumno haya llegado puntual a clases $P(P)$. Lo haremos utilizando el Teorema de la Probabilidad Total **(1 pto)**

$$P(P) = P(P \cap T) + P(P \cap A) = P(T) \cdot P\left(\frac{P}{T}\right) + P(A) \cdot P\left(\frac{P}{A}\right)$$
$$= 0'75 \cdot 0'6 + 0'25 \cdot 0'9 = 0'675$$

La probabilidad de que un alumno no haya llegado puntual a clases es,

$P(\overline{P}) = 1 - P(P) = 1 - 0.675 = 0.325$ **(0.25 ptos)**

b) Aplicaremos el Teorema de Bayes, para calcular la probabilidad pedida **(1.25 ptos)**

$$P\left(\frac{A}{P}\right) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{P(A) \cdot P\left(\frac{P}{A}\right)}{P(P)} = \frac{0'25 \cdot 0'9}{0'675} = 0'\hat{3} = \frac{1}{3}$$